Μάθημα 8ο 04/11/16

Καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο

$c(s), s\in I$, $c: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\|\dot c(s)\|=1$

Καμπυλότητα $\kappa: I\to[0,+\infty)$, $\kappa(s)=\|\ddot c(s)\|$
ΥΠΟΘΕΣΗ $\kappa(s)>0$, $\forall s\in I$
Πλαίσιο Frenet: $\vec t=\dot c$, $\vec n=\dfrac{\ddot c}{\|\ddot c\|}=\dfrac{\ddot c}{\kappa}$, $\vec b=\vec t\times\vec n$

Στρέψη $\tau: I\to\mathbb{R}$, $\tau(s)=\langle \dot{\vec n}(s), \vec b(s)\rangle$, $\tau=\dfrac{[\dot c\ \ddot c\ \dddot c]}{\|\ddot c\|^2}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η c είναι επίπεδη $\Leftrightarrow \tau=0$

Εξισώσεις Frenet:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vec t}&=\kappa\vec n\\ \dot{\vec n}&=-\kappa\vec t+\tau\vec b\\ \dot{\vec b}&=-\tau\vec n\end{aligned}\right]\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\dot{\vec t}\\ \dot{\vec n}\\ \dot{\vec b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\-\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec t\\ \vec n\\ \vec b\end{pmatrix}$$

$\bar s=-s$

$$\frac{dc}{d\bar s}=\frac{ds}{d\bar s}\cdot\frac{dc}{ds}=-\frac{dc}{ds}$$

$$\frac{d^2c}{d\bar s^2}=-\frac{d}{d\bar s}\left(\frac{dc}{ds}\right)=-\frac{ds}{d\bar s}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{dc}{ds}\right)\Rightarrow\frac{d^2c}{d\bar s^2}=\frac{d^2c}{ds^2}$$

$$\frac{d^3c}{d\bar{s}^3} = \frac{d}{ds}\frac{d^2c}{ds^2} = \frac{ds}{d\bar{s}}\cdot\frac{d^3c}{ds} = -\frac{d^3c}{ds^3}$$

Έστω $c, \tilde{c}$ γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες, δηλαδή $\tilde{c} = T\circ c$, $T\in Isom(\mathbb{R}^3)$
$T = T_v \circ A$, T_v = παράλληλη μεταφορά κατά $v\in\mathbb{R}^3$, $A\in O(3)$.

Έστω ότι η c έχει παράμετρο το μήκος τόξου s, $\frac{d\tilde{c}}{ds} = A\dot{c} \Rightarrow$ και η $\tilde{c}$ έχει το s ως μήκος τόξου.

$\dot{\tilde{c}} = A\dot{c} \Rightarrow \ddot{\tilde{c}} = A\ddot{c}$, $\dddot{\tilde{c}} = A\dddot{c}$

Η καμπυλότητα της $\tilde{c}$ είναι $\tilde{\kappa} = \|\ddot{\tilde{c}}\| = \|A\ddot{c}\| = \|\ddot{c}\| = \kappa$

Η στρέψη της $\tilde{c}$ είναι: $\tilde{\tau} = \frac{[\dot{\tilde{c}}, \ddot{\tilde{c}}, \dddot{\tilde{c}}]}{\|\ddot{\tilde{c}}\|^2} = \frac{[A\dot{c}, A\ddot{c}, A\dddot{c}]}{\tilde{\kappa}^2} = \frac{\det A[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{\kappa^2}$

Συμπέρασμα: $\tilde{\tau} = \pm\tau$
- $+\tau$, όταν A = στροφή
- $-\tau$, όταν A = ψευδοστροφή.

Καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ με τυχούσα παράμετρο t

$c: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $c(t)$, $t\in I$, κανονική

Η καμπυλότητα της c είναι η συνάρτηση $\kappa: I \to [0,+\infty)$, $\kappa = \frac{\|c'\times c''\|}{\|c'\|^3}$

ΥΠΟΘΕΣΗ: $\kappa(t) > 0$, $\forall t\in I$

Το μήκος τόξου είναι η συνάρτηση $s = s(t) = \int_{t_0}^{t}\|c'(u)\|du$.

$\frac{ds}{dt} = \|c'\| > 0 \Rightarrow$ Η συνάρτηση $s = s(t)$ αντιστρέφεται με αντίστροφη $t = t(s)$

και $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{\|c'\|}$.

Η αναπαραμέτρηση της c με το μήκος τόξου είναι η καμπύλη $\bar{c}(s) = c(t(s))$ με καμπυλότητα $\bar{\kappa}$ και στρέψη $\bar{\tau}$.
Η στρέψη τ της c είναι η συνάρτηση $\tau : I \to \mathbb{R}$.
$\bar{\tau}(t) = \bar{\tau}(s(t))$.

$$\tau = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{\|\ddot{c}\|^2} = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{\kappa^2}$$

$$\dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dc}{dt} \Rightarrow \dot{c} = \frac{dt}{ds} \cdot c'$$

$$\ddot{c} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds} \cdot c'\right) = \frac{d^2t}{ds^2} c' + \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dc'}{ds} = \frac{d^2t}{ds^2} \cdot c' + \frac{dt}{ds} \frac{dt}{ds} \frac{dc'}{dt} \Rightarrow$$

$$\ddot{c} = \frac{d^2t}{ds^2} \cdot c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \cdot c''$$

$$\dddot{c} = \frac{d^3t}{ds^3} \cdot c' + \frac{d^2t}{ds^2} \cdot \frac{dc'}{ds} + 2\frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} \cdot c'' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \cdot \frac{dc''}{ds} =$$

$$= \frac{d^3t}{ds^3} \cdot c' + 3\frac{d^2t}{ds^2} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot c'' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dc''}{dt} \Rightarrow$$

$$\dddot{c} = \frac{d^3t}{ds^3} c' + 3\frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} \cdot c'' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c'''$$

$$\tau = \frac{1}{\frac{\|c' \times c''\|^2}{\|c'\|^6}} \left[\frac{dt}{ds} \cdot c', \frac{d^2t}{ds^2} \cdot c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c'', \frac{d^3t}{ds^3} c' + 3\frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} c'' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c'''\right]$$

$$\tau = \frac{\|c'\|^6}{\|c' \times c''\|^2} \left[\frac{dt}{ds} \cdot c', \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \cdot c'', \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \cdot c'''\right] = \frac{\|c'\|^6}{\|c' \times c''\|^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^6 [c', c'', c''']$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{[c', c'', c''']}{\|c' \times c''\|^2}$$

$\dot{c} = \frac{dt}{ds} c'$, $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|c'\|}$

$\vec{t} = \dot{c}$, $\vec{n} = \frac{\ddot{c}}{\kappa}$, $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$

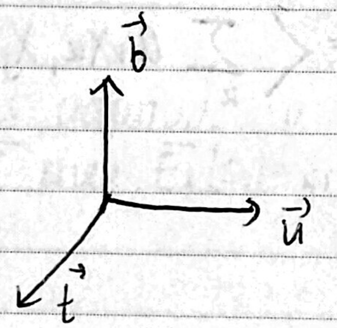
$$\boxed{\vec{t} = \frac{c'}{\|c'\|}}$$

$$\vec{b} = \frac{c'}{\|c'\|} \times \frac{\ddot{c}}{\|c'\| \cdot \kappa} c' \times \left(\frac{d^2t}{ds^2} \cdot c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \cdot c'' \right) = \frac{1}{\|c'\| \cdot \kappa} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \cdot c' \times c'' =$$

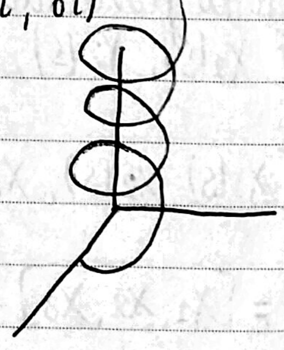
$$= \frac{1}{\|c'\| \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}} \cdot \frac{1}{\|c'\|^2} c' \times c'' \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{b} = \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|}}$$

$$\boxed{\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (κυλινδρική έλικα): $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$
$a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$, $\tau = \frac{[c', c'', c''']}{\|c' \times c''\|^2} = \dots = \frac{b}{a^2+b^2}$



ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ $\mathbb{R}^3$.

(i) Ύπαρξη: Δίνονται λείες συναρτήσεις $\kappa(s)$, $\tau(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$ ώστε $\kappa(s) > 0$, $\forall s \in I$. Τότε υπάρχει καμπύλη $c(s)$ του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο s και καμπυλότητα και στρέψη τις δοθείσες συναρτήσεις $\kappa(s)$, $\tau(s)$, αντίστοιχα

(ii) Μοναδικότητα: Έστω $c, \tilde{c}: I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλες με κοινή παράμετρο το μήκος τόξου s, καμπυλότητες $\kappa(s) = \tilde{\kappa}(s) > 0$ και στρέψη $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$, $\forall s \in I$. Τότε οι $c, \tilde{c}$ είναι γεωμ. ισότιμες, δηλ. $\tilde{c} = T \circ c$, $T = T_v \circ A$, A = στροφή του $\mathbb{R}^3$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: i) Θεωρώ βάση δεξιόστροφη και ορθομοναδιαία $\{V_1, V_2, V_3\}$. Θεωρώ τον πίνακα:

$$A(s) = (a_{ij}(s)) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \qquad s_0 \in I$$

και το σύστημα με άγνωστες X_1, X_2, X_3 διανυσματικές συναρτήσεις

$$\left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}^{\cdot} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \right. \quad \text{με αρχικές τιμές } X_i(s_0) = V_i \;, \; i = 1, 2, 3.$$

Έστω $\{X_1(s), X_2(s), X_3(s)\}$ η μοναδική λύση του προβλήματος, $s \in I$
Θεωρώ τις συναρτήσεις $f_{ij}(s) = \langle X_i(s), X_j(s) \rangle$, $s \in I$

$$\dot{f}_{ij} = \langle \dot{X}_i, X_j \rangle + \langle X_i, \dot{X}_j \rangle = \left\langle \sum_k a_{ik} X_k, X_j \right\rangle + \left\langle X_i, \sum_k a_{jk} X_k \right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{f}_{ij}(s) = \sum_k a_{ik} f_{kj} + \sum_k a_{jk} f_{ik}$$

$$f_{ij}(s_0) = \langle V_i, V_j \rangle = \delta_{ij}$$

Επειδή ο $A = (a_{ij})$ είναι αντισυμμετρικός, οι συναρτήσεις δ_{ij} είναι του (s). Λόγω μοναδικότητας της λύσης έχουμε $f_{ij}(s) = \delta_{ij}$, $\forall s \Rightarrow$
$\{X_1(s), X_2(s), X_3(s)\}$ είναι ορθομοναδιαία βάση $\forall s \in I$.

$f(s) = [X_1(s), X_2(s), X_3(s)]$, $f(s_0) = [V_1, V_2, V_3] = +1$.

$$\dot{f} = [X_1, X_2, X_3]^{\cdot} = \underbrace{[\dot{X}_1\, X_2\, X_3]}_{0} + \underbrace{[X_1\, \dot{X}_2\, X_3]}_{0} + \underbrace{[X_1\, X_2\, \dot{X}_3]}_{0} \Rightarrow \dot{f} = 0 \Rightarrow \overset{\text{σταθερή}}{f(s) = 1}, \; \forall s$$

Ορίζω την καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}^3$ με $c(s) = \int_{s_0}^{s} X_1(u)\,du$, $\frac{dc}{ds} = X_1 \Rightarrow \left\| \frac{dc}{ds} \right\| = 1$
$\Rightarrow s =$ μήκος τόξου. Επιπλέον $\vec{t} = \dot{c} = X_1$

$$\vec{n} = \frac{\ddot{c}}{\|\ddot{c}\|} = \frac{\dot{X}_1}{\|\dot{X}_1\|} = \frac{kX_2}{\|kX_2\|} = X_2$$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = X_1 \times X_2 = X_3$$

$\langle \dot{\vec{n}}, \vec{b} \rangle = \langle \dot{X}_2, X_3 \rangle = \tau$

ii) Μοναδικότητα: Έστω $\{E_1 = \vec{t}, E_2 = \vec{n}, E_3 = \vec{b}\}$, το πλαίσιο Frenet της c και $\{\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3\}$, το πλαίσιο Frenet της $\tilde{c}$, $s_0 \in I$

$\{E_1(s_0), E_2(s_0), E_3(s_0)\}, \{\tilde{E}_1(s_0), \tilde{E}_2(s_0), \tilde{E}_3(s_0)\}$

Θεωρώ το $A \in O(3)$ και $A\tilde{E}_i(s_0) = E_i(s_0)$, $i \in \{1,2,3\}$.
ο A είναι στροφή.
Θεωρώ την καμπύλη $\bar{c} = T_v \circ \tilde{c}$ όπου $T = T_v \circ A \circ T_w$, $v = c(s_0)$
$w = -\tilde{c}(s_0)$

$\bar{c}(s_0) = T_v(A(T_w(\tilde{c}(s_0)))) = T_v(A\,0) = T_v(0)$ $\quad T_w P = w + P$
$\Rightarrow \bar{c}(s_0) = c(s_0)$ $\quad T_v P = v + P$

Η $\bar{c}$ έχει μήκος τόξου το s, καμπυλότητα κ και στρέψη τ, το πλαίσιο Frenet $\{\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3\}$ της $\bar{c}$ είναι $\bar{E}_1(s_0) = A\tilde{E}_1(s_0) = E_1(s_0)$.

$\bar{E}_i(s_0) = E_i(s_0)$

$\Rightarrow \boxed{\bar{E}_i(s) = E_i(s)}$ $\forall s \in I$, $i \in \{1,2,3\}$.

$$\bar{E}_1(s) = E_1(s) \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \dot{\bar{c}}(s) &= \dot{c}(s) \quad \forall s \\ \bar{c}(s_0) &= c(s_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{c}(s) = c(s) \quad \forall s.$$

Το $\tilde{c}(s) = c(s) \Rightarrow c, \tilde{c}$, γεωμ. ισότιμες

ΠΟΡΙΣΜΑ: Οι μόνες καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ με σταθερή θετική καμπυλότητα και σταθερή μη-μηδενική στρέψη είναι οι κυλινδρικές έλικες.

Καμπύλες σταθεράς κλίσης

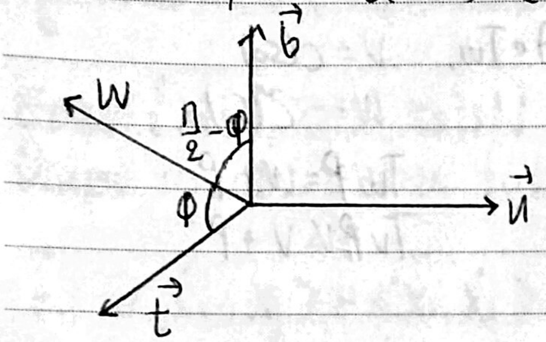
ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια κανονική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ καλείται καμπύλη σταθεράς κλίσης ανν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες σχηματίζουν σταθερή γωνία (κλίση) με μια σταθερή διεύθυνση

$\Leftrightarrow \exists\, w$ μοναδιαίο διάνυσμα ώστε $\langle \vec{t}, w\rangle =$ σταθερό

Έστω $c : J \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη σταθεράς κλίσης με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in J$ και καμπυλότητα $\kappa(s) > 0,\ \forall s \in J$. Τότε υπάρχει w, $\|w\| = 1$, ώστε $\langle \vec{t}(s), w\rangle = \cos\varphi$, $\varphi =$ κλίση της c

Παραγωγίζω $\langle \dot{\vec{t}}, w\rangle + \langle \vec{t}, \dot{w}\rangle = 0 \overset{\dot{\vec{t}} = \kappa\vec{n}}{\Longleftrightarrow} \langle \kappa\vec{n}, w\rangle = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \kappa\langle \vec{n}, \vec{w}\rangle = 0 \overset{\kappa>0}{\Longleftrightarrow} \langle \vec{n}, w\rangle = 0.$



$w = \langle w, \vec{t}\rangle \vec{t} + \langle w, \vec{b}\rangle \vec{b} \Leftrightarrow$

$w = \cos\varphi\, \vec{t} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \vec{b}$

$w = \cos\varphi\, \vec{t} + \sin\varphi\, \vec{b} \xrightarrow{\text{παραγ.}} 0 = \cos\varphi\, \dot{\vec{t}} + \sin\varphi\, \dot{\vec{b}} \xrightarrow[\dot{\vec{b}} = -\tau\vec{n}]{\dot{\vec{t}} = \kappa\vec{n}} \kappa\cos\varphi\, \vec{n} - \tau \sin\varphi\, \vec{n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\kappa\cos\varphi - \tau\sin\varphi)\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \kappa\cos\varphi = \tau\sin\varphi \Leftrightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\tau}{\kappa} = \cot\varphi}$

Αντίστροφα, έστω $c(s)$ καμπύλη με φυσική παράμετρο, καμπυλότητα $\kappa(s) > 0$, $\forall s \in J$ και στρέψη $\frac{\tau}{\kappa} = \cot\varphi$, για κάποια σταθερά γωνία φ.

$\frac{\tau}{\kappa} = \cot\varphi \Leftrightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \Leftrightarrow \kappa\cos\varphi = \tau\sin\varphi.$

Θεωρώ τη διανυσματική συνάρτηση $w(s) = \cos\varphi\, \vec{t}(s) + \sin\varphi\, \vec{b}(s)$

$\dot{w}(s) = \cos\varphi\, \dot{\vec{t}}(s) + \sin\varphi\, \dot{\vec{b}}(s) = \cos\varphi\, \kappa(s)\vec{n}(s) - \sin\varphi\, \tau(s)\vec{n}(s) =$

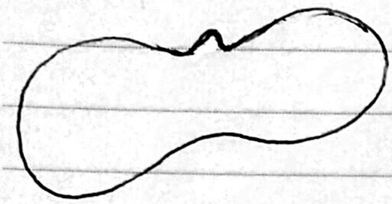
$= (\kappa(s)\cos\varphi - \tau(s)\sin\varphi)\vec{n}(s) = 0 \Rightarrow w(s) =$ σταθ $= w.$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $C: I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη με παντού θετική καμπυλότητα κ και στρέψη τ. Η C είναι καμπύλη σταθεράς κλίσης <u>ανν</u> $\frac{\tau}{\kappa} = \sigma\tau\alpha\theta. = c$

$\frac{\tau}{\kappa} = \cot\varphi$, $\varphi =$ κλίση , $w = \cos\varphi\, \vec{t} + \sin\varphi\, \vec{b}$

Κλειστές καμπύλες

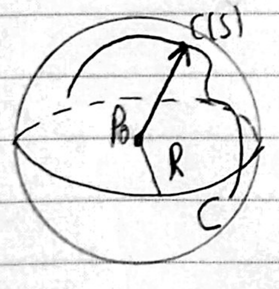
$C: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καλείται κλειστή <u>ανν</u> υπάρχει $L > 0$
$C(L+t) = C(t)$



Σφαιρικές καμπύλες

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια καμπύλη $C: I \to \mathbb{R}^3$ καλείται σφαιρική <u>ανν</u> η εικόνα της περιέχεται σε κάποια σφαίρα του $\mathbb{R}^3$.

Έστω $C: I \to \mathbb{R}^3$ σφαιρική καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s.
Υποθέτω ότι η εικόνα της περιέχεται στη σφαίρα κέντρου P_0 και ακτίνας $R > 0$.



$d(C(s), P_0) = R \Leftrightarrow \|C(s) - P_0\| = R \Leftrightarrow \langle C(s) - P_0, C(s) - P_0 \rangle = R^2$

$2 \langle C(s) - P_0, \dot{C}(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$\langle C(s) - P_0, \vec{t}(s) \rangle = 0$ (1)

$\langle \dot{C}(s), \dot{C}(s) \rangle + \langle C(s) - P_0, \ddot{C}(s) \rangle = 0$

$\langle C(s) - P_0, \ddot{C}(s) \rangle = -L \Rightarrow \ddot{C}(s) \neq 0, \ \forall s \Leftrightarrow \kappa(s) > 0, \ \forall s.$

$(1) \Leftrightarrow \quad C(s) - P_0 = \langle C(s) - P_0, \vec{n}(s) \rangle \vec{n}(s) + \langle C(s) - P_0, \vec{b}(s) \rangle \vec{b}(s).$

$\| C(s) - P_0 \|^2 = \langle C(s) - P_0, \vec{n}(s) \rangle^2 + \langle C(s) - P_0, \vec{b}(s) \rangle^2$

$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{R} \langle C(s) - P_0, \vec{n}(s) \rangle \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \langle C(s) - P_0, \vec{b}(s) \rangle \right)^2 = \underline{\underline{1}}$

<u>ΛΗΜΜΑ</u> $\Longrightarrow$ Υπάρχει λεία γωνιακή συνάρτηση $\omega(s)$ ώστε:

$$\begin{cases} \langle C(s) - P_0, \vec{n}(s) \rangle = R\cos\omega(s) \\ \langle C(s) - P_0, \vec{b}(s) \rangle = R\sin\omega(s) \end{cases}$$

$C(s) - P_0 = R(\cos\omega(s)\vec{n}(s) + \sin\omega(s)\vec{b}(s))$

$\vec{t}(s) = R\Big(-\dot{\omega}(s)\sin\omega(s)\vec{n}(s) + \cos\omega(s)\,[\dot{\vec{n}}(s) = -\kappa(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s)] +$

$+ \dot{\omega}(s)\cos\omega(s)\vec{b}(s) - \sin\omega(s)\,\tau(s)\vec{n}(s)\Big)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -R\kappa(s)\cos\omega(s). \\ 0 = R(-\dot{\omega}(s)\sin\omega(s) - \tau(s)\sin\omega(s)) \Leftrightarrow (\dot{\omega} + \tau)\sin\omega = 0 \\ 0 = R(\tau(s)\cos\omega(s) + \dot{\omega}(s)\cos\omega(s)) \Leftrightarrow (\dot{\omega} + \tau)\cos\omega = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\kappa(s) = -\frac{1}{R\cos\omega(s)}}$ $\qquad \omega(s)$ πάντα αυθλεία

$\boxed{\tau = -\dot{\omega}}$

Συμπέρασμα: Οι μόνες σφαιρικές καμπύλες με σταθερή καμπυλότητα είναι κύκλοι (ή τόξα κύκλων).